შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

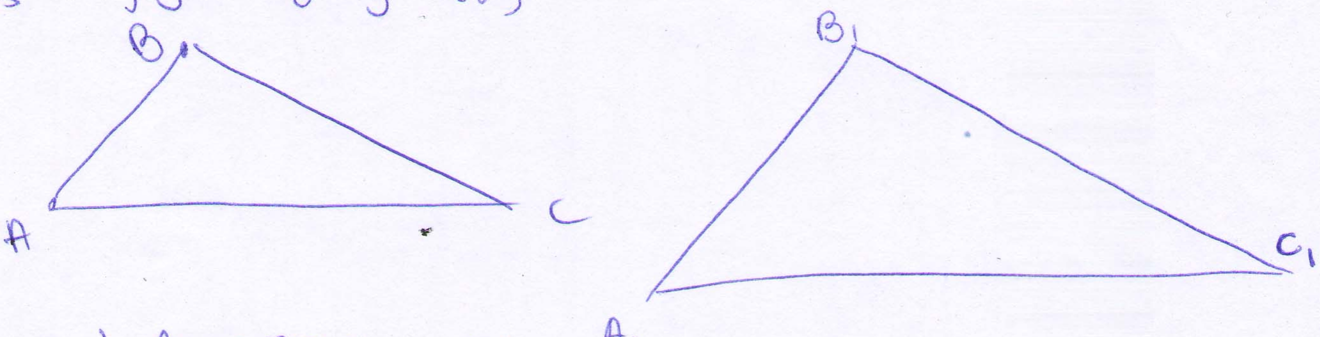
მაგიდა №

21.04.2012/ მათ/ I/ 045

ამოცანა № 1

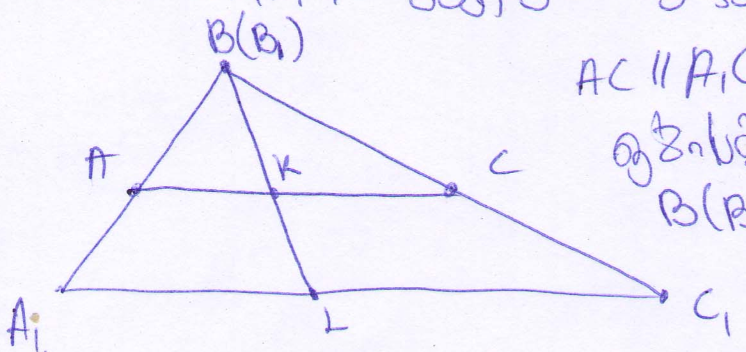
გვერდი № 1

დავამტკიცოთ რომ თუ ორ მსგავს სამკუთხედში შესაბამისი ~~მხვედრი~~ წვეროებიდან გავლებული შუალედი ~~შესაბამისი~~ გვერდებს შესაბამის ნაწილებად ყოფს ტოლი ფარდობით ~~ფარდობით~~ არის



ვთქვათ რომ $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

მოვდოთ B და B_1 ერთ წერტილში და დავამთხვიოთ A_1B_1 AB-ს ხოლო B_1C_1 BC-ს ამის გაკეთება შეგვიძლია რადგან $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$. გვექნება შემდეგი სურათი



$AC \parallel A_1C_1$ რადგან $\angle BAC = \angle BA_1C_1$.

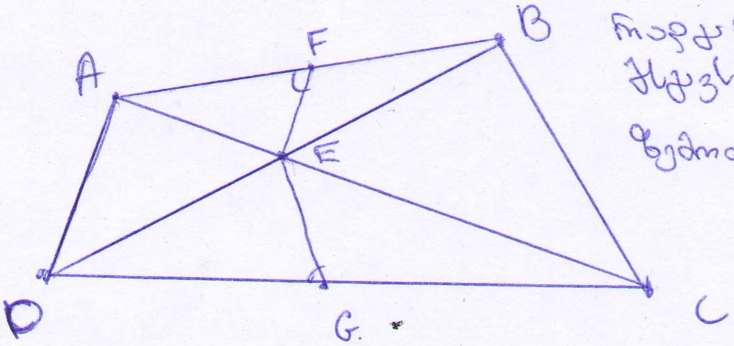
ნებისმიერი წრფე გავავლოთ $B(B_1)$-ზე ისე რომ წრფემ გადაკვეთოს C_1 ... მონაკვეთი. რადგან

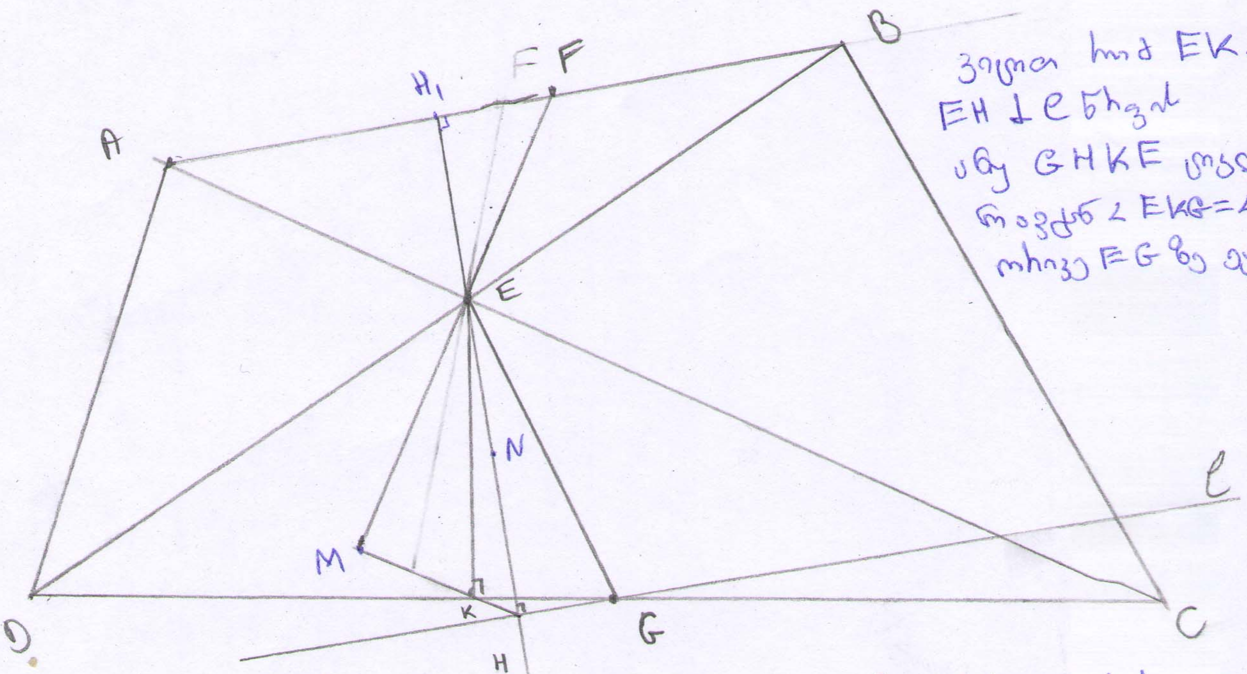
$AC \parallel A_1C_1 \Rightarrow \angle AKB = \angle A_1LB$ ~~...~~ ანუ BL ...

ანუ მსგავსებიდან მივიღეთ $\frac{AK}{KC} = \frac{A_1L}{LC_1}$. რ.დ.გ.

ABCD- ტრაპეციაა.

$\Delta ABE \sim \Delta DEC$ ანუ $\angle AFE = \angle EGD$ რადგან EF და EG მედიანებია მსგავს სამკუთხედებში რაც ზემოთ დავამტკიცეთ.





ვუშვათ რომ $EK \perp DC$
$EH \perp \ell$ წრფის
ანუ $GHKE$ ჩაწერილია
რადგან $\angle EKG = \angle EHG = 90^\circ$
რომელიც EG ზე ეყრდნობა

ჩაწერილობიდან გამომდინარე $\angle KHE = \angle KGE = \angle EFA$ EH გავაგრძელოთ AB-ს გადაკვეთამდე და ეს წერტილი იყოს H_1 რადგან $AB \parallel \ell$ წრფის $HH_1 \perp AB$
$\angle H_1EF = \angle MEH$ $\angle MHE = \angle H_1FE \Rightarrow \angle EMH = \angle EH_1F = 90^\circ$ ანუ ΔEMH მართკუთხაა ანუ MN მედიანა უდრის ჰიპოტენუზის ნახევარს ანუ $EH = 2MN$

რ.დ.გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

21.04.2012/ მათ/ I/ 045

ამოცანა № 2

გვერდი № 1

~~დავუშვათ ყველას ყავს 1341 მეგობარი~~

დავყოთ სამ ჯგუფად. პირველ ჯგუფში იქნება 671 კაცი მეორეში 671 ხოლო მესამეში 670. პირველი ჯგუფიდან ~~ყველა~~ ყველას იცნობს ~~მეგობრები~~ მეორე და მესამე ჯგუფში ხოლო მეორე ჯგუფიდან ყველას პირველში და მესამეში მესამედან ყველას პირველსა და მეორე ჯგუფში იცნობს თითოეული მონაწილე არ იცნობს თავის ჯგუფიდან არავის. და ასევე მონაწილე ხედავს რომ I ჯგუფში ეყოლება 1341 მეგობარი ხოლო II ჯგუფში 1341 III ჯგუფში 1342 მეგობრები იცნობს ნიშნავს „მეგობრები" არიან. ავირჩიოთ ეხლა 4 კაცი რომლებიც პირველები ხედავენ რომ მათ შორის მოხვდება ერთი ჯგუფში სადაც ორივე ერთმანეთს არ იცნობენ. ანუ შესაბამისად ~~ყველა~~ ~~ვინ~~ ~~თუ~~ რომ არ ვირჩევთ ყოველ ოთხ მონაწილეს შორის მოიძებნება ისეთი ორი მონაწილე, რომლებიც არ არიან ერთმანეთის „მეგობრები" არ არიან.

ო. გ. ჯ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

21.04.2012/ მათ/ I/ 045

ამოცანა № 3

გვერდი № 2

ვთქვათ რომ $a \vdots p$ $b \vdots p$ ვთქვათ $a = p^{t_1}$ $b = p^{t_2}$

$a^n \vdots p^{t_1 \cdot n}$ და $b^n \vdots p^{t_2 \cdot n}$ ~~დავამტკიცოთ რომ a−b ვერ იქნება~~

$\min(t_1; t_2) = d$ $t_1 = d + t_a$ $t_2 = d + t_b$ დავამტკიცოთ რომ

$a-b$ ვერ იყოფა $p^{n\cdot d+1}$-ზე და $p^{n\cdot d}$ დავამტკიცოთ რომ

იყოფა. თუ $p^{n\cdot d+1}$-ზე არ იყოფა ანუ $p^{n\cdot d+1}$-ზე ნაშთი

არ იყოფა $a-b = a^n \cdot c - b^n \cdot d = a^{n\cdot d\cdot t_a} \cdot c - b^{n\cdot d t_b} \cdot d$

$a^{n\cdot d\cdot t_a}$ იყოფა $p^{n\cdot d}$-ზე და $b^{n d t_b} \vdots p^{nd}$-ზე ანუ $a-b$-ს

იყოფა. თუ t_a ... t_b $t_a \neq 1$ მაშინ $a^{nd\cdot t_a}$

ვთქვათ $a \vdots p^{t_1}$ სადაც t_1 არის მაქსიმალური $b \vdots p^{t_2}$ სადაც t_2-ის მაქსიმალური. $a = p^{t_1}\cdot a_1$ $b = p^{t_2} b_1$

$a - b = p^{t_1} a_1 - p^{t_2} b_1 = p^{t_1 \cdot n} a_1^n c - p^{t_2 \cdot n} b_1^n \cdot d$ ~~ვნახოთ ... n=1~~

~~$a-b = c\, a - b\, d$ ა) $c = d+1$ $a - b = ... d + a - b d$~~

დავუშვათ $n>1$ ზოგადობის შეუზღუდავად დავუშვათ რომ $t_1 < t_2$

$p^{t_1}(a_1 - p^{t_2-t_1}\cdot b_1) = p^{t_1 n}(a_1^n \cdot c - p^{(t_2-t_1)n} \cdot b_1^n \cdot d)$

$a_1 - p^{t_2-t_1}\cdot b_1 = p^{t_1(n-1)}(a_1^n \cdot c - p^{(t_2-t_1)n} \cdot b_1^n \cdot d) \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 - p^{t_2-t_1}\cdot b_1 \vdots p$ რადგან $n>1$ $p^{t_2-t_1}\cdot b_1 \vdots p$ ანუ $a_1 \vdots p$

მაგრამ $a_1 \not\vdots p$ რადგან t_1 მაქსიმალური ხარისხი იყო ანუ $t_2 = t_1$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

21.04.2012/ მათ/ I/ 045

ამოცანა № 3

გვერდი № 3

ანუ $a_1 - b_1 = p^{t_1(n-1)}(a_1^n \cdot c - \cancel{p^{t_1(n-1)}} b_1^n \cdot d) \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 - b_1 \vdots p^{t_1(n-1)}$ დავამტკიცოთ რომ უფრო მეტ ხარისხზე ვერ იყოფა

თუ იყოფა მაშინ $a_1^n \cdot c - b_1^n \cdot d \vdots p$ რადგან $a_1 - b_1 \vdots p^{t_1(n-1)}$

ანუ $a_1 - b_1 \vdots p$ $a_1 \equiv b$ (mod p) $\Rightarrow a_1^n \equiv b_1^n$ (mod p)

$a_1^n \cdot c - b_1^n \cdot d \equiv a_1^n \cdot d \pm a_1^n - a_1^n d = \pm a_1^n \equiv 0 \Rightarrow \pm a_1^n \vdots p$ მაგრამ

$a_1 \not\vdots p \Rightarrow a_1 - b_1 \vdots p^{t_1(n-1)}$ სადაც $t_1(n-1)$ მაქსიმალურია

ანუ $a - b = p^{t_1}(a_1 - b_1) \vdots p^{t_1 \cdot n}$ ანუ $a - b$ იყოფა p-ს n-ის ჯერად ხარისხზე, ანუ $\sqrt[n]{|a-b|}$ - იქნება მთელი რიცხვი.

$n = 1$ სამი $\sqrt[n]{|a-b|} = |a-b|$. $a, b \in \mathbb{Z}$ $|a-b| \in \mathbb{Z}$